黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 3 hours ago
mathtod.online/@konyonyo/23443…

私は次のGauss積分の公式が大好きだし、様々な理由で大学1年生のときに習得しておくべき最も重要な公式であるとも考えています。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

リンク先の公式は $x = \sqrt{a}\,y$ で置換積分すれば得られる。

あと、やっぱりガンマ函数は大事です。

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\,dt.$$

右辺の積分は $\operatorname{Re} s > 0$ で絶対収束する。

ガンマ函数は上のガウス積分のパラメーター s による一般化になっています。実際、ガウス積分で被積分函数が偶函数であることを使い、$x = \sqrt{t}$ と置換積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \Gamma(1/2)$$

となることがわかります。$s = 1/2$ でのガンマ函数の特殊値がガウス積分です。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 3 hours ago
ガンマ函数と言えばベータ函数との関係：

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du \\ &= 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \end{aligned}$$

この公式で $p = q = 1/2$ の場合を考えると、$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ が得られます。

1つ目の等号は定義のつもり。

2つ目の等号は $u = \cos^2\theta$ で置換積分すれば得られる。

3つ目の等号は $\Gamma(p)\Gamma(q)$ を適切に計算して行くと $\Gamma(p+q)B(p,q)$ に変形できることから得られます。この計算は多重積分の計算に慣れるためには非常に良い練習問題だと思う。

計算結果がとても有用である点がよい。単に複雑なだけに見える計算問題をやるのはとてもつまらないと思う。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 2 hours ago

Gauss積分を一般化した

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}|x|^a\,dx$$

の形の積分はガンマ函数そのものである。被積分函数が偶函数であることを使い、$x=\sqrt{t}$ で置換積分すると、

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}|x|^a\,dx\\&=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{(a-1)/2}\,dt\\&=\Gamma((a+1)/2).\end{aligned}$$

ガンマ函数は

$$\int_0^{\infty} e^{-at}t^{s-1}\,dt$$

の形で登場することが多い。$t=u/a$ で置換積分すると、$dt/t=du/u$ より、

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} e^{-at}t^{s-1}\,dt\\&=\int_0^{\infty} e^{-u}a^{-s}u^{s-1}\,du\\&=a^{-s}\,\Gamma(s).\end{aligned}$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 2 hours ago

$x=\sqrt{t}$ とおくと

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}|x|^{2s-1}\,dx\\&=\int_0^{\infty} e^{-at}t^{s-1}\,dt\\&=a^{-s}\Gamma(s).\end{aligned}$$

最初の式を a で微分して -1 倍すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}|x|^{2(s+1)-1}\,dx=a^{-s-1}\Gamma(s+1)$$

になり、最後の式を a で微分して -1 倍すると、

$$sa^{-s-1}\Gamma(s)$$

になる。それらを比較すると

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$$

この公式は部分積分を使って証明されることが多いが、以上のように、積分記号化の微分を使って証明することもできる。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 2 hours ago

以上の計算は次のリンク先の計算の一般化になっている。

mathtod.online/@noranekozawa/2…
mathtod.online/@noranekozawa/2…
mathtod.online/@noranekozawa/2…

黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

ガウス積分だけではなく、次もガンマ函数です:

$$a\int_0^\infty e^{-x^a}x^{as-1}\,dx = \Gamma(s).$$

指数函数の中身が $-x^2$ でなくて、$-x^a$ であってもガンマ函数になってしまう。

Airy函数は

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-zt+t^3/3}\,dt$$

で、Bessel函数は

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{-z(t-1/t)}t^{-n-1}\,dt.$$

2017年06月08日 13:44 · Web · 0 · 1 · Webで開く